I Espaces de fonctions continues

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Généralités

Définition 1. On définit $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ comme l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

Définition 2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$. On définit la norme uniforme $\|.\|_\infty$ par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Définition 3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N,\ \forall\, x \in [a,b],\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Cela revient à dire que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Théorème 4. *Un limite uniforme de fonctions continues est continue.*

Corollaire 5. *L'espace* $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Exemple 6. *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie sur* $[0,1]$ *par* $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ *converge uniformément vers* $x \mapsto e^{-x}$.

Exemple 7. *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie sur* $[0,1]$ *par* $f_n(x) = x^n$ *ne converge pas uniformément.*

Théorème 8 (Heine)**.** *Toute fonction de* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ *est uniformément continue.*

Lemme 9 (Dini)**.** *Toute suite croissante de* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ *qui converge simplement dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ *converge uniformément.*

Application 10. *Soit* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ *définie par* $P_0 = 0$ *et* $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in [-1,1]$. *Alors* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $x \mapsto |x|$.

Théorème 11 (Weierstrass)**.** *Soient* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\varepsilon > 0$. *Il existe* P *une fonction polynomiale à coefficients réels telle que* $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Application 12. *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ *vérifiant* $\int_a^b t^n f(t)\, dt = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors* $f = 0$ *sur* $[a,b]$.

2) Théorème d'Ascoli

Définition 13. Une famille de fonctions $Y \subseteq \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ est dite équicontinue lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, f \in Y,\ |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Exemple 14. *(i) Une partie finie de* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ *est équicontinue.*

(ii) Une suite uniformément convergente de fonctions de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ *forme une famille équicontinue.*

(iii) L'ensemble des fonctions lipschitziennes est équicontinu.

Théorème 15 (Ascoli)**.** *Soit* $Y \subseteq \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$. *Sont équivalentes :*

(i) Y *est équicontinue et bornée pour la norme uniforme.*

(ii) $\overline{Y}$ *est compacte.*

Application 16. *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques compacts,* μ *une mesure borélienne finie et* $K \in \mathcal{C}^0(X \times Y, \mathbb{K})$. *On considère l'application :*

$$T : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(Y,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(X,\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \int_Y K(x,y) f(y)\, d\mu(y) \end{array} \right.$$

Alors $T\left(B_{\mathcal{C}^0(Y,\mathbb{K})}(0,1)\right)$ *est relativement compact dans* $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{K})$.

II Espaces L^p

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $p \in [1, +\infty]$ et q son exposant conjugué tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Définitions et premières propriétés

Définition 17. Pour tout réel $p > 0$, on définit le $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

$$\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \,\middle|\, \int_X |f|^p\, d\mu < +\infty \right\}$$

Sauf situation ambiguë, on privilégiera la notation plus concise $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Exemple 18. *Dans le cas de la mesure de comptage, cette définition donne les espaces* $\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ *des suites de puissance* p *sommable.*

Proposition 19. *Soient* $0 < p \leqslant q$ *des réels.*

(i) Si μ *est finie, alors* $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \supset \mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$.

(ii) Si on considère la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, alors $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \supset \ell^q_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

Remarque 20. *Il n'y a pas, en général, d'inclusion entre les espaces $\mathscr{L}^p$.*

Définition 21. Pour toute fonction $f : X \to \mathbb{K}$ et tout $p > 0$, on définit :

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad \left(\text{convention : } \infty^{\frac{1}{p}} = \infty\right)$$

Théorème 22 (Hölder)**.** *Soient $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $g \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.*

Théorème 23 (Minkowski)**.** *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f, g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Alors $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Définition 24. Pour $1 \leqslant p < +\infty$, on définit $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ comme l'espace vectoriel normé quotient de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ par les fonctions presque nulles. On associera par abus de langage un élément de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ à sa classe dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Définition 25. On définit le supremum essentiel de $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ par :

$$\|f\|_\infty = \text{supess}(f) = \inf\{M > 0 \,|\, \mu(\{f > M\}) = 0\} \geqslant 0$$

On note $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées.

Définition 26. On définit $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ comme l'espace vectoriel normé quotient de $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ par les fonctions presque nulles.

Remarque 27. *En considérant 1 et ∞ comme exposants conjugués, on retrouve les inégalités de Hölder et de Minkowski.*

Théorème 28 (Riesz-Fischer)**.** *Pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un espace de Banach.*

2) Convolution, densité et régularisation

Définition 29. On appelle convolution de f et g la fonction $f * g$ définie par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy$ lorsque celle-ci est bien définie.

Proposition 30. *(i) $f \in L^1$, $g \in L^p \Rightarrow \|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.*
(ii) $f \in L^p$, $g \in L^q \Rightarrow \|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Proposition 31. *$(L^1, +, *)$ est une algèbre de Banach.*

Définition 32. Une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions positives de L^1 d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}^d$ est une approximation de l'unité si elles sont d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}^d$, et si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \rho_n = 0$. Si les ρ_n sont $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on parle de suite régularisante.

Théorème 33. *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $(\rho_n)_n$ une approximation de l'identité ($p \in [1, +\infty[$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\rho_n * f) = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Théorème 34. *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

3) Cas particulier de L^2

Définition 35. L'application $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle_{L^2_{\mathbb{K}}} = \int_X fg \, d\mu$ définit un produit scalaire. On note $\|.\|_{L^2_{\mathbb{K}}} = \|.\|_2$ la norme associée.

Corollaire 36. *$\left(L^2_{\mathbb{K}}(\mu), \langle .,.\rangle_{L^2_{\mathbb{K}}}\right)$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 37. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx < \infty$, alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.*

III Espaces de Sobolev

On considère $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 38. Soit $f \in L^1(I)$. On dit que f admet une dérivée faible s'il existe $g \in L^1(I)$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I)$, on a $\int_I f\varphi' = -\int_I g\varphi$. On note alors $g = f'$, qui est unique.

Définition 39. On définit $H^1(I) = \left\{f \in L^2(I) \,\middle|\, f' \in L^2(I)\right\}$, que l'on munit du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle_{H^1} = \langle f, g\rangle_{L^2} + \langle f', g'\rangle_{L^2}$.

Théorème 40. *$\left(H^1(I), \langle .,.\rangle_{H^1}\right)$ est un espace de Hilbert.*

Définition 41. On définit $H^1_0(I)$ comme l'adhérence de $\mathcal{C}^\infty_c(I)$ dans $H^1(I)$. $H^1_0(I)$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est munit du produit scalaire $\langle .,.\rangle_{H^1}$.

Théorème 42 (Riesz)**.** *Soient H un espace de Hilbert et $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que $\langle u, v\rangle = \varphi(v)$ pour tout $v \in H$.*

Théorème 43 (Lax-Milgram)**.** *Soient H un problème de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive sur H, et ℓ une forme linéaire et continue sur H. Alors :*

$$\exists!\, u \in H,\ \forall\, v \in H,\ a(u,v) = \ell(v)$$

Si de plus a est symétrique, u est caractérisé par :

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \ell(u) = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v)\right\}$$

Application 44 (Dirichlet)**.** *Pour $f \in L^2$, on considère le problème :*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \textit{sur}\,]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 & \end{cases}$$

Il existe une unique solution faible $u \in H_0^1$ à ce problème.

Développements

- Théorème de Riesz-Fischer (28) [Bre87]
- Densité des polynômes orthogonaux (37) [BMP05]
- Théorème de Weierstrass (11) [Gou08]

Références

[BP12] Marc Briane and Gilles Pagès. *Théorie de l'intégration.* Vuilbert, 2012

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* H&K, 2005

[Bre87] Haïm Brezis. *Analyse fonctionelle.* Masson, 1987

[QZ13] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2013